**4.1 域;多项式根** 2021年7月27日09点36分

**4.1.1定义**. 令F是一个集合,在其上定义两个运算:加法和乘法,分别被记为和.即,下列条件必须被满足.

**闭包**:对所有,加法之和与乘积在F元素上是良好定义的.如果下列命题成立,则F被称为关于这两个操作的**域**.

**结合律**:对所有的,

**交换律**:对所有的,

**分配律**:对所有的,

**恒等元素**:集合F包含一个元素0,称为**加法单位元素**,使得对所有,

集合F还包含一个元素1(要求与0不同)称为**乘法单位元素**,使得对所有,

**逆元素**:对于每一个,方程

具有一个解,称为a的加法逆,记为.

对于每一个非0元素,方程

具有一个解,称为a的乘法逆,记为.

4.1.2命题. 令F是一个域,令.

**消除律**:如果,则.如果且,则.

恒等元素的唯一性:如果,则.如果且,则.

逆的唯一性: 如果,则.如果且,则.

4.1.3命题. 令F是一个域.

对所有,.

如果且,则.

对所有,.

对所有,.

对所有,.

4.1.4定义. 令F是一个域.如果(其中m是一个非负整数),则形式

的任意表达式被称为F上的多项式,其中x被称为未定量,被称为系数.系数的下表i被称为它的索引.

如果n是最大非负正整数使得,则我们说多项式具有度数n,写作,被称为f(x)的首项系数[leading coefficient].如果是f(x)的首项系数,则f(x)被称为一个常数多项式.

如果的首项系数是1,则被称为**首一多项式[monic polynomial]**.

系数在F上的多项式集合记为.

4.1.5命题. 如果和在中是非零多项式,则它们的乘积是非零且

4.1.6推论. 如果,并且是非零多项式,则意味着.

4.1.7定义. 令.如果对某些,则我们说是的一个因子或除数,我们写作.

能够被整除的所有多项式集合记为.

4.1.8引理. 对任意元素,和隐忍正整数k,

4.1.9定理(剩余定理). 令是一个非零多项式,并且令.则存在一个多项式使得

此外,如果,其中且,则和.

4.1.10定义. 令.令,如果,则c被称为多项式f(x)的**根**.

4.1.11推论. 令是一个非零多项式,令.则c是f(x)的根当且仅当是f(x)的一个因子.即,当且仅当.

4.1.12推论. 系数在域F中的度数n的多项式在F上至多具有n个不同的根.

4.2 因子 2021年7月27日14点09分

4.2.1定理(除法算法). 对F[x]中的任意多项式f(x)和g(x),其中,存在唯一多项式使得

其中或.

4.2.2定理. 令I是的一个子集,且满足下列条件:

I包含非零多项式;

如果,则;

如果,,则.

如果d(x)是I中最小度数的任意非零多项式,则

4.2.3定义. 令是一个首一多项式,令.如果满足下列条件:

同时是f(x)和g(x)的一个除数,

f(x)和g(x)的任意除数同时是d(x)的除数.

则d(x)被称为f(x)和g(x)的最大公约数,写作.

如果,则多项式f(x)和g(x)被称为互质.

4.2.4定理. 对任意非零多项式,最大公约数存在且可以表达成f(x)和g(x)的线性组合,

对某些.

4.2.5命题. 令.如果且,则.

4.2.6定义. 如果中的一个非常数多项式不能分解成中两个低度多项式的乘积,则它被称为**不可约的[irreducible]**,否则它被称为**可约的[reducible]**.

4.2.7命题. 一个度数为2或3 的多项式在域F上不可约当且仅当它在F域上没有根.

4.2.8引理. 非常数多项式在域上不可约当且仅当对所有,意味着或.

4.2.9定理(唯一分解). 任何在域F中具有系数的非常量多项式都可以表示为多个首一多项式的乘积,其中每个首一多项式在域F上都是不可约的.除了因子出现的顺序之外,该表达式是唯一的.

4.2.10定义. 令.令,如果

其中,则c被称为的重根.

4.2.11命题. 实数域上的一个非常数多项式没有重复因子当且仅当.

4.3 根的存在性 2021年7月27日15点07分

4.3.1定义. 令E和F是域.如果F是E的子集并且具有从E诱导的加法和乘法运算,则F被称为E的**子域[subfield]**,E被称为F的**扩展域[extension field]**.

4.3.2定义. 令F是一个域,令p(x)是F上的一个固定多项式.令,如果,则a(x)和b(x)被称为同模[congruent modulo]于p(x),写作.

集合被称为a(x)的同余类[congruence class],记为.

所有同模于的同余类的集合(集合族)记为.

4.3.3命题. 令F是一个域,令是中的一个非零多项式,令是任意多项式.如果不是的一个因子,则同模于的同余类恰好包含一个多项式使得.

4.3.4命题. 令是一个域,令p(x)是F[x]中的一个非零多项式.对于F[x]中的任意多项式a(x),b(x),c(x)和d(x),下列条件成立.

如果且,则且.

如果且,则.

对于任意非零多项式,命题4.3.4允许我们在中定义加法和乘法.我们做下列定义,类似于命题1.4.2:

4.3.5命题. 令F是一个域,并且令p(x)是F[x]中的一个非零多项式.对于任意,同余类在有乘法逆当且仅当.

4.3.6定理. 令F是一个域,并且令p(x)是F[x]中的一个非常数多项式.则是一个域当且仅当在F上是不可约的.

4.3.7定义. 令和是域.一个函数被称为域同构仅当它是双射且满足

其中是任意的两个值.

4.3.8定理(克罗内克). 令F是一个域,并且令f(x)是F[x]中的任意非常数多项式.则F存在一个扩展域和一个元素使得.

4.3.9推论. 令F是一个域,并且令f(x)是F[x]中的任意非常数多项式.则F存在一个扩展域E使得f(x)可以分解成线性因子的乘积.

**4.4 Z,Q,R和C上的多项式** 2021年7月27日18点10分

**4.4.1命题**. 令是一个具有整数系数的多项式.如果是的一个实根且,则和.

**4.4.2定义**. 如果一个整数系数的多项式的所有系数只有和两个公共除数,则该多项式被称为**本原[primitive]**多项式.

**4.4.3引理**. 令是一个质数,并且令,其中, ,以及.如果和按索引分别是和最小无法被整数的系数,则按索引是最小无法被整数的系数.

**4.4.4定理(高斯引理)**. 两个本原多项式的乘积是本原.

**4.4.5定理**. 具有整数系数的多项式如果可以分解为具有有理系数的多项式,那么也可以分解为具有整数系数的同次多项式.

**4.4.6定理(爱森斯坦的不可约标准)**. 令是一个具有整数系数的多项式.如果存在一个质数使得

但是且,则在有理数域上是不可约的.

**4.4.7推论**. 如果是一个质数,则多项式

在有理数域上是不可约的.

**4.4.8定义**. 多项式在C中的根被称为复数单位n次根.一个复数单位n次根被称为本原仅当它是多项式的根,但不是的根,其中是一个正整数.

**4.4.9定理(基础代数定理)**. 任何具有复系数的正次数多项式都有一个复根.

**4.4.10推论**. 任意具有复系数的次数n>0的多项式可以表达成线性因子的乘积,形式如下

4.4.11命题. 令f(x)是一个具有实系数的多项式.则一个复数z是f(x)的根当且仅当它的共轭也是f(x)的根.

4.4.12定理. 任何具有实系数的正次数多项式都可以分解为具有实系数的线性项和二次项的乘积.